Apellido y Nombres: ....,,,,,,...
DNI: .... Padrón: .... Código Asignatura: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....
Correo electrónico: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Tercera fecha. 9 de abril de 2021.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. La función f tiene a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}\,(z-1-i)^n$ como desarrollo de Taylor centrado en $z_0 = 1+i$, válido en un entorno D. Dadas las curvas $\gamma_1=\{z\in\mathbb{C} : |z-i|=1\}$ y $\gamma_2=\{z\in\mathbb{C} : |z-1|=1\}$, ambas orientadas en sentido positivo, sean $\Gamma_1 = f(\gamma_1\cap D)$ y $\Gamma_2 = f(\gamma_2\cap D)$. Verificar que Γ_1 y Γ_2 se intersecan en $f(z_0)$. Obtener $f(z_0)$ y la magnitud del ángulo determinado por Γ_1 y Γ_2 en $f(z_0)$. Estudiar el mismo problema para el caso en que la serie está dada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{4^n}\,(z-1-i)^n$.

Ejercicio 2. Se tiene un condensador que encierra la región del plano:

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-2)^2+(y-2)^2\leqslant 4,\ \ y\leqslant x\right\}$$

para el cual la función potencial en los bordes satisface:

$$u(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{para} \quad y=x,\ \ (x-2)^2+(y-2)^2<4 \\ 1 & \text{para} \quad (x-2)^2+(y-2)^2=4,\ \ y<x \end{cases}$$

Hallar una función T de variable compleja que transforme este condensador en uno equivalente de placas paralelas. Indicar cómo quedan las condiciones de contorno en las placas paralelas (no se pide hallar $u(x,y)$).

Ejercicio 3. Resolver el siguiente problema, indicando las hipótesis consideradas sobre f:

$$\begin{cases} u_{tt}=2u_{xx}-3x & 0<x<\pi,\ t>0 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 & t\geqslant 0 \\ u(x,0)=f(x) & 0\leqslant x\leqslant \pi \\ u_t(x,0)=0 & 0\leqslant x\leqslant\pi \end{cases}$$

Ejercicio 4. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x|\leqslant 1 \\ e^{-2|x|} & \text{si} \quad |x|>1 \end{cases}$$

Probar que existe $\hat{f}$, la transformada de Fourier de f. Determinar si f es cuadrado integrable y calcular el valor de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2\,d\omega$.

Ejercicio 5. Obtener y en términos de g, sabiendo que para $t>0$:

$$y(t)=\phi(t-2)H(t-2)+(H*\phi)(t)$$
$$\phi'(t)=\int_0^t g(\tau)\ d\tau$$

con $\phi(0^+)=0$, siendo $H(t)$ la función de Heaviside.

RESOLUCIÓN MUY ESQUEMÁTICA DEL INTEGRADOR DE ANÁLISIS III 09-04-2021

---

1) Las dos circunferencias orientadas se cortan ortogonalmente en $z_0 = 1+i$. Por otra parte, tenemos $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}(z-z_0)^n = \frac{1}{4}(z-z_0) + \frac{2}{4^2}(z-z_0)^2 + \frac{3}{4^3}(z-z_0)^3 + \ldots.$ serie que define a la función holomorfa en el disco abierto de centro z_0 y radio 4. Se observa que la derivada de *f* en z_0 es $\frac{1}{4} \neq 0$, por lo tanto *f* es conforme en este punto y entonces el ángulo buscado es $\frac{\pi}{2}$.

Ahora, si $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{4^n}(z-z_0)^n = \frac{1}{4^2}(z-z_0)^2 + \frac{2}{4^3}(z-z_0)^3 + \frac{3}{4^4}(z-z_0)^4 + \ldots.$, la serie que define a la función holomorfa en el disco abierto de centro z_0 y radio 4 pero se observa que la derivada de *f* en z_0 es nula, por lo tanto *f* no es conforme en este punto. <u>Lo que sigue no es necesario para la aprobación del ejercicio:</u>

Podemos escribir

$$f(z) = (z-z_0)^2 \overbrace{\left[\frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^3}(z-z_0) + \frac{3}{4^4}(z-z_0)^2 + \ldots.\right]}^{g(z)}$$

donde la función *g* es holomorfa en el mismo disco y además $g'(z_0) = \frac{2}{4^3} \neq 0$, por lo tanto es conforme en el punto z_0 y entonces conserva los ángulos entre las curvas orientadas que se cortan en z_0, mientras que la función cuadrática $p(z) = (z-z_0)^2$ duplica estos ángulos y lo mismo ocurre con *f*. Veamos un poco porqué , de manera algo intuitiva. Alcanza ver este fenómeno para los ángulos que forman dos rectas orientadas que pasan por z_0, pues el ángulo que forman dos curvas orientadas que se cortan en z_0 es el ángulo entre sus dos vectores tangentes orientados en dicho punto. Sean $r_u = \{z_0 + tu : t \in \Re\}$ y $r_v = \{z_0 + tv : t \in \Re\}$ dos de estas rectas, donde $u = e^{i\alpha}$ y $v = e^{i\beta}$ *v* son dos complejos de módulo 1. Supongamos que $\alpha > \beta$, con lo cual, el ángulo orientado entre ambos versores es $\alpha - \beta$. Las curvas parametrizadas por $\gamma(t) = f(z_0 + tu)$ y $\sigma(t) = f(z_0 + tv)$ se cortan en $\gamma(0) = \sigma(0) = f(z_0) = 0$. El problema con estas parametrizaciones es que no son regulares en 0, pues $\gamma'(t) = f'(z_0 + tu)u$ y $\sigma'(t) = f'(z_0 + tv)v$ se anulan en *t* = 0. Pero veamos qué pasa si tomamos un *t* "próximo" a 0:

$$\gamma'(t) = f'(z_0 + tu)u = \{\overbrace{f'(z_0)}^{=0} + \overbrace{f''(z_0)}^{\neq 0}tu + \tfrac{1}{2}f'''(z_0)t^2u^2 + \ldots\}u$$

y por lo tanto, para cada $t \in (0,4)$ (esto para no salir del disco de convergencia de la serie):

$$\frac{\gamma'(t)}{t} = \{\overbrace{f''(z_0)}^{\neq 0}u + \tfrac{1}{2}f'''(z_0)tu^2 + \ldots\}u = f''(z_0)u^2 + \tfrac{1}{2}f'''(z_0)tu^3 + \ldots$$

y análogamente,

$$\frac{\sigma'(t)}{t} = f''(z_0)v^2 + \tfrac{1}{2}f'''(z_0)tv^3 + \ldots$$

Ahora bien: el ángulo entre los tangentes $\gamma'(t)$ y $\sigma'(t)$ es el argumento del cociente $\dfrac{\gamma'(t)}{\sigma'(t)}$ (meditarlo a partir de la expresión en polares). En nuestro caso, tenemos

$$\frac{\gamma'(t)}{\sigma'(t)} = \frac{\frac{\gamma'(t)}{t}}{\frac{\sigma'(t)}{t}} = \frac{f''(z_0)u^2 + \frac{1}{2}f'''(z_0)tu^3 + \ldots}{f''(z_0)v^2 + \frac{1}{2}f''(z_0)tv^3 + \ldots} \xrightarrow[t\to 0+]{} \frac{u^2}{v^2}$$

Pero el ángulo entre $u^2 = e^{i2\alpha}$ y $v^2 = e^{i2\beta}$ es $2\alpha - 2\beta = 2(\alpha - \beta)$, el doble del ángulo entre *u* y *v*. Todo este razonamiento puede hacerse detalladamente para curvas regulares que se cortan en el punto z_0, en lugar de semirrectas. El razonamiento es el mismo, pero los detalles técnicos son más engorrosos.

En definitiva, la respuesta es $2\dfrac{\pi}{2} = \pi$.

---

2) La bisectriz del primer cuadrante corta a la circunferencia en los puntos $z_1 = 2 - \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})i$ y $z_2 = 2 + \sqrt{2} + (2 + \sqrt{2})i$. Ahora, las sucesivas transformaciones

$$z \longrightarrow z - z_1 \longrightarrow \frac{1}{z - z_1} \longrightarrow \frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z_2 - z_1}$$

llevan el semidisco original al sector angular $A = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{4} < Arg(z) < \frac{\pi}{4}\}$. Por lo tanto, la transformación

$$z \xrightarrow{T} Log\left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z_2 - z_1}\right)$$

(donde Log es el logaritmo principal), transforma el semidisco original en la banda infinita

$$R = \{w \in \mathbb{C} : -\tfrac{\pi}{4} < \mathrm{Im}(w) < \tfrac{\pi}{4}\}.$$

Asimismo, puede comprobarse que la parte rectilínea del borde del semidisco original se transforma en la recta $r_1 = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(w) = -\frac{\pi}{4}\}$, y la semicircunferencia en la recta $r_2 = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(w) = \frac{\pi}{4}\}$. Obsérvese que $u(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\mathrm{Im}(T(x+iy)) + \dfrac{1}{2}$ es la solución del problema de Dirichlet planteado.

---

3) Se puede simplificar considerablemente el problema considerando la nueva función incógnita $v(x,t) = u(x,t) - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}\pi^2 x$, que debe satisfacer:

$$\begin{cases} (1)\ \dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 2\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} & 0 < x < \pi\ ,\ t > 0 \\ (2)\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ (3)\ v(x,0) = f(x) - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}\pi^2 x & 0 \le x \le \pi \\ (4)\ \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0 & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Para cada entero positivo n, la función $v_n(x,t) = sen(nx)\cos(\sqrt{2}nt)$ satisface (1), (2) y (4), que constituyen la parte lineal del problema (estas soluciones se pueden obtener mediante separación de variables). Ahora, planteamos una solución de las cuatro condiciones en la forma

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen(nx)\cos(\sqrt{2}nt)$$

Los coeficientes c_n ahora se determinan por la condición (4):

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen(nx) = \overbrace{f(x) - \tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{1}{4}\pi^2 x}^{g(x)}\ \ ,\ \ 0 \le x \le \pi$$

Es decir: se considera la extensión 2π-periódica impar de la función g, cuyos coeficientes de Fourier son, precisamente los coeficientes c_n. Sobre las condiciones que debe satisfacer f para que todo esto funcione bien, se recomienda leer la resolución del integrador 26-03-2021 publicada en la página de la materia. Nuestra solución puede expresarse, finalmente, en la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen(nx)\cos(\sqrt{2}nt) + \tfrac{1}{4}x^3 - \tfrac{1}{4}\pi^2 x$$

---

4) Que f es absolutamente integrable y de cuadrado integrable es casi obvio y no lo detallamos aquí. Por otra parte, por ser f una función real par:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)dx - i\int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{f(x)sen(\omega x)}^{\textit{función impar de } x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{f(x)\cos(\omega x)dx - i0}^{\textit{función par de } \omega}$$

Por lo tanto $\hat{f}$ es par y entonces:

$$\int_0^{+\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega \overset{Parseval}{=} \tfrac{1}{2}2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(x)\right|^2 dx = \pi\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(x)\right|^2 dx$$

Calculemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(x)\right|^2 dx \overset{f\ es\ par}{=} 2\int_0^{+\infty}\left|f(x)\right|^2 dx = 2\int_0^1 dx + 2\int_1^{+\infty} e^{-4x}dx = 2 + 2\left[\frac{e^{-4x}}{-4}\right]_{x=1}^{x=+\infty} = 2 + 2\frac{e^{-4}}{4} = 2 + \frac{1}{2e^4}$$

Por lo tanto, la respuesta es $2\pi + \dfrac{\pi}{2e^4}$.

---

5) Utilizando las propiedades de la TL mencionadas en la resolución del Profesor Acero, la ecuación $y'(t) = \phi(t-2)H(t-2) + (H * \phi)(t)$ se transforma en

$$Y(s) = e^{-2s}\Phi(s) + \frac{1}{s}\Phi(s)$$

donde Φ es la TL de la función ϕ que verifica $\phi'(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau$ y $\phi(0^+) = 0$. De esta expresión tenemos $\phi''(t) = g(t)$ y por lo tanto $s^2\Phi(s) - s\underbrace{\phi'(0^+)}_{=0} - \underbrace{\phi(0^+)}_{=0} = G(s)$ (= TL de *g*). Resulta entonces que

$$Y(s) = e^{-2s}\frac{G(s)}{s^2} + \frac{G(s)}{s^3} = \left(\frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{1}{s^3}\right)G(s) \quad (*)$$

Obsérvese que todo esto es posible si la abscisa de convergencia de *G* es menor o igual a 0, hipótesis que debe mencionarse. En ese caso, la identidad (*) se verifica para todo complejo *s* tal que Re(*s*) > 0 y resulta entonces que

$$y(t) = (u * g)(t)$$

donde *u* es una función cuya TL es $\dfrac{e^{-2s}}{s^2} + \dfrac{1}{s^3}$ con abscisa de convergencia 0. Haciendo las cuentas tenemos que $u(t) = (t-2)H(t-2) + \tfrac{1}{2}t^2H(t)$.
